ECON 2200, Flervariabelanalyse - Handout

Kjell Arne Brekke

February 1, 2011

1 Funksjoner av flere variable

En trenger mer enn en innsatsfaktor for å produsere noe. Selv enkel produksjon som en kopp kaffe i kaffebaren trenger arbeidskraft (noen som jobber der), kapital (kaffemaskin), råvarer (vann, kaffe, filter) og energi (strøm). Men vi starter enklere og ser på to av dem: kapital k og arbeidskraft n. La nå

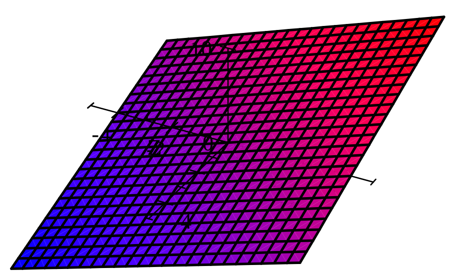
$$y = f(k, n)$$

være antall enheter y som produseres når vi har k enheter kapital og n enheter arbeidskraft.

La nå først

$$y = f(k, n) = k + n$$

Vi kan tegne dette tredimensjonalt:



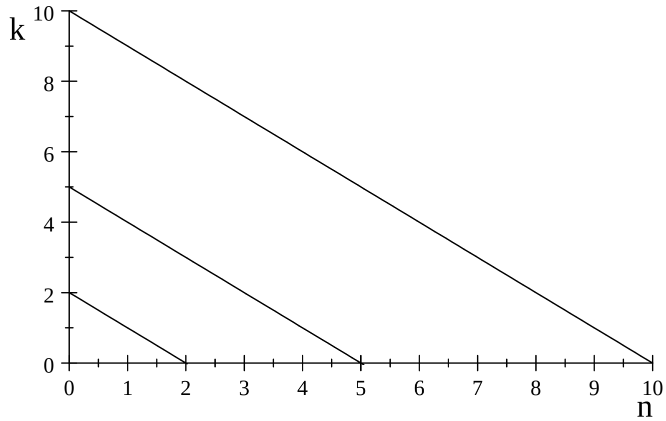
Men slike tegninger er ikke lette å lage og ikke alltid lette å lese. Vanligere er det å gjøre som når vi trekker koter i kart, å tegne nivålinjer: For hvilke kombinasjoner av n og k vil vi produsere 5 enheter av y? Det gir ligningen

$$5 = k + n$$

eller

$$k = 5 - n$$

Tegner vi denne i et k-n diagram får vi en fallende rett linje. Gjør vi det samme for $y = 2$ og $y = 10$ får vi følgende figur.



Problem 1 *Tegn nivålinjene i for $y = 5$ i for følgende to funksjoner*

$$
\begin{aligned}
y &= f(k,n) = k + 3n \\
y &= k + n^2
\end{aligned}
$$

2 Partielle deriverte

Med de derivasjonsreglene vi har vært kan vi nå lett derivere disse funksjonene

$$
\begin{aligned}
g(n) &= n^2 a \\
h(k) &= b^2 k
\end{aligned}
$$

Her er a og b^2 konstanter, så da får vi

$$
\begin{aligned}
g'(n) &= 2na \\
h'(k) &= b^2
\end{aligned}
$$

Hva nå med å derivere funksjonen

$$f(n,k) = n^2 k.$$

Her har vi to innsatsfaktorer og for hver innsatsfaktor kan vi spørre: Hva skjer med produksjonen om vi øker produksjonen med en enhet arbeidskraft men holder kapitalen fast. Dette kaller vi en partiellderivert, og skriver det på to alternative måter

$$f'_n(n,k) = \frac{\partial f(n,k)}{\partial n}$$

Siden vi holder kapitalen fast blir det som en konstant, og regnestykket er som når vi deriverte funksjonen g ovenfor (bare at nå står det k og ikke a)

$$f'_n(n,k) = \frac{\partial f(n,k)}{\partial n} = 2nk$$

Tilsvarende kan vi bruke resultatet fra derivasjonen av h til å si at

$$f'_k(n,k) = \frac{\partial f(n,k)}{\partial k} = n^2$$

Problem 2 *Betrakt funksjonen*

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

Hva blir

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

og

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

3 Kjerneregelen

Se på følgende derivasjoner

$$f(x) = (a+3x)^2$$

denne deriverer vi med kjerneregelen

$$\begin{aligned} f(x) &= g(u(x)) \\ g(u) &= u^2 \\ u(x) &= 1+3x \end{aligned}$$

det gir

$$\begin{aligned} g'(u) &= 2u \\ u'(x) &= 3 \\ f'(x) &= g'(u)u'(x) = 2u \cdot 3 = 6(a+3x) \end{aligned}$$

Vi bytter ut a med y

$$f(x,y) = (y+3x)^2$$

det gir

$$\begin{aligned} f(x,y) &= g(u(x,y)) \\ g(u) &= u^2 \\ u(x,y) &= y+3x \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} g'(u) &= 2u \\ u'_x(x,y) &= 3 \\ f'_x(x,y) &= 6(y+3x) \end{aligned}$$

Problem 3 *Hva blir*

$$f'_y(x,y) = ?$$